27.03.14

d) Anzahl der Möglichkeiten n gleiche Objekte auf k verschiedene Fächer aufzuteilen $\binom{k+n-1}{n}$

Zahlenbeispiel: zwei Objekte im Fach 3, drei Obj. im Fach 4 und ein Objekt im Fach 7 mit $k=7$

Fächer	1	2	3	4	5	6	7
			∘∘	∘∘∘			∘

$n := 1+2+3 = 6$ → Binärzahl mit $k+n-1$ Stellen

1 | 100 | 1000 | 1 | 10

e) (Partitionszahl) Anzahl der Möglichkeiten eine n-elementige Menge in k Teilmengen mit jeweils $n_1, n_2, \dots, n_k$ Elementen aufzuteilen: $a(b_1, b_2, \dots) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \cdot \frac{1}{b_1!\, b_2! \dots}$

Hierbei bezeichnet b_l die Anzahl der l-elementigen Teilmengen, die bei dieser Aufteilung vorkommen.

(wenn also z.B. $n_1 = n_2 =: l < n_j$, dann $b_l = 2$)

- Zahlenbeispiel: eine Gruppe von 10 Leuten soll in 3 Mannschaften aufgeteilt werden, und zwar in 2 Dreiermannschaften und eine 4er-Mannschaft. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür (ohne Reihenfolge der beiden Dreier-Mannschaften)?

Antwort: $a(0,0,2,1) = \frac{10!}{3!\,3!\,4!} \cdot \frac{1}{2! \cdot 1!} = \underline{2100}$

Bem.: Es gilt $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot l = \sum_{l=1}^{n} b_l \cdot l \Rightarrow \boxed{a(b_1, b_2, \dots) = \frac{n!}{\prod b_l!\, (l!)^{b_l}}}$

14 2.6 Formel des Ein- und Ausschließens (Siebformel). P ist additiv (1) $n=2$: $P(A \cup B)$

$n=2$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$n=3$: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Allgemein wird folgende Formel per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ bewiesen: $P(A_1 \cup \dots$

$$\boxed{P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k})}$$

16 2.8 Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS) Def.: Zwei Zufallsvariablen $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ heißen identisch verteilt, wenn $p_X = p_Y$ (bzw. $P_X = P_Y$) gilt. Urbilder müssen zu den gleichen Wahrscheinlichkeiten führen

Satz (Zentr. Grenzwertsatz): Für eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sigma := \sigma X_1 = \sigma X_2 = \dots > 0$ (=0 nur bei einem einzelnen Wert für P) und beliebigen $\mu := EX_1 = EX_2 = \dots \in \mathbb{R}$ gilt für alle $b \in \mathbb{R}$ die Grenzwertformel.

Erwartungswert der Summe der Größen

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_n - n \cdot \mu}{\sigma \sqrt{n}} \le b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}$$

Vergleichsparameter (Zahl)

Standard-Normalverteilung $\Phi(b)$

03.04.2014

Interpretation des ZGWS: Für „große" $n \in \mathbb{N}$ gilt $P\left\{ \underbrace{\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}} \le b \right\} \approx \Phi(b)$

Die Zufallsvariable S_n^* ist die Standardisierung von $S_n := X_1 + \dots + X_n$ (≙ Summe)

$E(X_1 + \dots + X_n) = EX_1 + \dots + EX_n \overset{\text{Def.}}{\underset{\mu}{=}} \mu + \dots + \mu = n \cdot \mu \Rightarrow \boxed{ES_n^* = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (n\mu - n\mu) = 0}$

$V(X_1 + \dots + X_n) = V(S_n) \overset{\text{unabh.}}{=} \overset{\sigma^2}{VX_1} + \dots VX_n \Rightarrow \sigma S_n = \sqrt{\sigma^2 + \dots + \sigma^2} = \sqrt{n \cdot \sigma^2}$

03.04.2014

SKPr Bem. zum Erwartungswert von $X: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$; $EX = \int_0^\infty t\, \underbrace{F_X'(t)}_{\text{(kumulative) Verteilungsdichte}} dt = \int_0^\infty \int_0^t F_X'(t)\, dx\, dt$

a) $= \overset{-! \text{ Grenzen vertauscht}}{\int_0^\infty \int_x^\infty} F_X'(t)\, dt\, dx = \int_0^\infty (1 - \overbrace{F_X(x)}^{P\{X > x\}})\, dx$

$= \int_0^\infty P\{X \,(=)> x\}\, dx$

a) Wenn $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ bzw. $\mathbb{R}$ unabhängig sind gilt: $\overset{\text{Dichtefkt}}{f_{X+Y}}(t) = \int_0^t f_X(x) f_Y(t-x)\, dx$ mit $t \geq 0$

bzw. $f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x) f_Y(t-x)$ mit $t \in \mathbb{R}$ für die Dichtefkt: $f_Z = F_Z'$ => Faltungsformel

Wichtige Verteilungsfunktionen

S20 A) Normalverteilung Dichte-Fkt.: $\varphi_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$

$\Rightarrow \varphi_{0,1} = \varphi$; (Standard-Normalverteilung)

? $\Phi_{\mu,\sigma}(x) := \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma}(t)\, dt \Rightarrow \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ gemäß Substitutionsregel

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$

Bem.: Die Standardisierung einer μ-σ-normalverteilten Zufallsvariable X, d.h. $P\{X \geq x\} = \Phi_{\mu,\sigma}(x)$ ist standardisiert.

Anwendungsbeispiel: In der Praxis sind EX und σX gewisse „Erfahrungswerte" einer Zufallsvariablen $X: \Omega \to \mathbb{R}$. Gemäß den ZGWS kann bei genügend häufiger Experimentwiederholung ($\hat{=} X$) angenommen werden, dass die entsprechende Summenvariable (S_n) μ-σ-normalverteilt ist mit $\mu := EX$ und $\sigma := \sigma X$.

Zahlenbeispiel: Messfehler einer Waage: Mittelwert $\overset{\mu}{0}$ mg; Standardabweichung $\overset{\sigma}{0{,}15}$ mg

Frage: W-keit für eine Messgenauigkeit von $\pm 2\sigma = \pm 0{,}3$ mg?

Antwort (mittels μ-σ-Normalverteilung): 95% (vgl. 100 maliges Würfeln!)

S24 B) Exponentialverteilung Dichtefkt. $g_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \in \mathbb{R}_0^+$) mit Parameter $\lambda > 0$

=> Verteilungsfkt. für eine λ-exp. verteilte Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$: $P\{X \leq x\} = \int_0^x g_\lambda(t)\, dt$

$= \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \cdot \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_{-\infty}^x = -e^{-\lambda x} + 1 = \underline{1 - e^{-\lambda x}}$

C) Erlang-Verteilung $X_1, \ldots, X_n$ λ-exp. verteilt $\Rightarrow S_n := X_1 + \ldots + X_n$ Erlang-Verteilung der Ordnung n zum Parameter $\lambda > 0$. Dichtefkt.: $f_{S_n}(x) := \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$

Verteilungsfkt.: $F_{S_n}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^m}{m!}$ $(x \geq 0)$ $\Rightarrow \boxed{ES_n = \frac{n}{\lambda}\ ;\ VS_n = \frac{n}{\lambda^2}}$

D) t- und χ^2-Verteilung relativ komplizierte Def. mittels Γ-Fkt. (die als analytische Fortsetzung $n \mapsto (n-1)!$ auf $\mathbb{N}$). Die beiden Verteilungen dienen der Bestimmung von „Vertrauensintervallen" (→ QS) von Erwartungswert bzw. Varianz einer Normalverteilten Zufallsvariablen unbekannte Varianz

Im Gegensatz dazu steht die „Erwartungswertschätzung" bei bekannter Varianz: μ-σ-normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem μ und bekanntem σ.

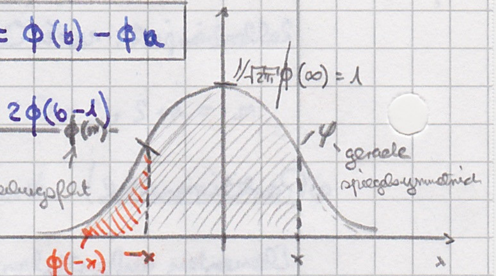
da $V(aX+b)=a^2V(X) \to \sigma(aX+b)=|a|\sigma X$ $\Rightarrow \boxed{\sigma(S_n^*) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n\sigma^2}=1}$

Folgerung aus dem ZGWS: $\boxed{P\{\sigma\sqrt{n}\cdot a \le S_n - n\mu \le \sigma\sqrt{n}\, b\} \approx \Phi(b)-\Phi(a)}$

n muss groß sein

Spezialfall: $a=-b$ $\quad P\{|S_n-n\mu|\le b\underbrace{\sigma\sqrt{n}}_{=\sigma S_n}\} \approx \Phi(b)-\Phi(-b) = 2\Phi(b)-1$

Formel $\boxed{\Phi(-b)=1-\Phi(b)}$



Zahlenbeispiel: 100 facher Würfelwurf

X_i := Augenzahl beim i-ten Wurf $(i\in\mathbb{N}_{100})$ $\Rightarrow S_n = S_{100}$ = Augensumme mit $ES_n = n\cdot\underset{3,5}{\mu} = 350$

und $\sigma S_n = \sqrt{100}\cdot\sigma = \sqrt{100}\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 17$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme im Intervall $350 \pm b\cdot 17$ ist:

b	$2\cdot\Phi(b)-1$	
1	0,682	≈ 68%
2	0,954	≈ 95%
3	0,997	≈ 100%

→ z.B. 68% im Intervall [333, 367] und 95% im Intervall [316, 384] und ≈ 100% zwischen [299, 401]

Bem. zur Güte der Approximation: Es sollte die Bedingung $\boxed{\sigma S_n > 3}$ eingehalten werden

Approximation der Binomial-Verteilung S_n := „Treffersumme" (bei n „Schüssen") bei Einzeltrefferw-keit

laut Tabelle für Binomial-Verteilung

$p\in\,]0,1[$ $\Rightarrow ES_n = n\cdot p$; $\sigma S_n = \sqrt{np(1-p)}$

$\boxed{P\{S_n - np \le b\sqrt{np(1-p)}\}\approx\Phi(b)}$ mit $p \overset{!}{>} 3$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\le\varepsilon\right\}=1$ für alle $\varepsilon>0$

Interpretation: Im Mittel wird schließlich der Erwartungswert erreicht (→ Mittelwert := Erwartungswert)

③ Das stetige Wahrscheinlichkeitsmodell

z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ = abzählbar → überabzählbar = nicht abzählbar z.B. $\mathbb{R}$

Voraussetzung: Ereignismenge Ω überabzählbar; typischerweise $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ bzw. „gewisse" Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{Q}$ ist abzählbar) wie z.B. Intervalle von $\mathbb{R}^n$ d.h. $]a_1,\dots,b_1[\times\dots\times]a_n,\dots,b_n[$ bzw. auch mit teilweise geschlossenen Klammern.

eine Wahrscheinlichkeit, da man nicht mehr zählen kann

Def: Eine stetige Fkt. $g:\Omega\to\mathbb{R}_0^+$ heißt W-Funktion oder auch Dichte-Funktion, wenn gilt $\int_\Omega g = 1$

Bsp.: $\Omega := [a,b]$, $P([c,d]) := \frac{d-c}{b-a}$ ← Intervalllänge für $a\le c<d\le b$; $=\frac{1}{b-a}\int_c^d 1\,dx \le g\cdot(b-a)$; $g = P'$ Ableitung

(Gleichverteilung auf Intervall $[a,b]$)

Def.: $EX := \int_\Omega gX$ (falls konvergent) heißt Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X:\Omega\to\mathbb{R}$

Bem.: Wie im diskreten Fall ist $P_X := P\circ X^{-1}$ (Urbild) (mit $X^{-1}(G) := \{\omega\in\mathbb{R} \mid X(\omega)\in G\}$) eine W-Verteilung auf $\mathbb{R}$.

Def.: Die Fkt. $F_X(x) := P_X(]-\infty,x]) \overset{Def.}{=} P\{X\le x\}$ heißt die (kumulative) Verteilungsfkt von X

Wichtiges Bsp.: $g:=\varphi:\mathbb{R}\to[0,1]$ mit „gaußscher Glockenfunktion" $\varphi(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$, siehe Graphik oben

X standard normalverteilt, d.h. $P\{X\le x\}=\Phi(x) \Rightarrow \boxed{F_X=\Phi}$ bedeutet X ist standard Normalverteilt

Mit anderen Worten: Φ ist also die Verteilungsfkt. einer bel. standard-normalverteilten Zufallsvariablen (nach $\mathbb{R}$)

$2 \cdot B\frac{a+b}{2}$

Aus ZGWS folgt für das arithmetische ~~Mittel~~ (Stichproben-) Mittel $\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ $\left(= \frac{S_n}{n}\right)$

2seitige → α nur einseitige — Merkmal — für n groß

$\boxed{P\left\{|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \approx 1 - \alpha}$ für alle $\alpha \in \,]0,1[$. Hierbei ist $z_\alpha := \Phi^{-1}(1-\alpha)$ das sogenannte α-Quantil. In Worten: Mit W.keit / „Sicherheit" $1-\alpha$ liegt im sog. „Konfidenzintervall"

$\left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] := \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Hierbei bezeichnet $\bar{x}$ einen "Beobachtungswert" von $\bar{X}$ mittels einer Stichprobe vom Umfang $n \in \mathbb{N}$.

Zahlenbeispiel: Messreihe von $n := 9$ normal-verteilten Signalwerten mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Standardabweichung $\sigma := 3$: $5, 8{,}5, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6.5, 10.5 \rightarrow \bar{x} = \frac{5 + 8{,}5 + \dots + 10{,}5}{9} = 9$

Skript Seite 21 → reicht für Prüfung

vorgegebenes „Konfidenzniveau" $\alpha := 5\%$ $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} \approx 1{,}96$

$\rightarrow z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{1{,}96}}$ $\Rightarrow$ Konfidenzintervall: $[9 \pm 1{,}96]$. In diesem Intervall liegt (das "wahre") μ mit 95%-iger Sicherheit